Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

20 de febrero de 2004.
Matemáticas II (MA–1112)

2^{do} Parcial. (35 %)
TIPO B

1. (5 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ a la curva de ecuación, $y = (1 + \cos(2x))^x$.

Solución: Tomando logaritmos a ambos lados obtenemos: $\ln(y) = x \ln(1 + \cos(2x))$.

Derivando ambos lados $\quad \frac{y'}{y} = x\frac{-2\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos(2x)} + \ln(1+\cos(2x)) \quad \Rightarrow \quad y' = y\left(x\frac{-2\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos(2x)} + \ln(1+\cos(2x))\right)$

Evaluamos en $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 1$.

$$y' = 1\left(\frac{\pi}{4}\,\frac{-2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})}{1+\cos(\frac{\pi}{2})} + \ln(1+\cos(\frac{\pi}{2}))\right) = \frac{\pi}{4}\,\frac{-2}{1} + \ln(1) = -\frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 1 = -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{o} \qquad 8y + 4\pi x = \pi^2 + 8.$$

---

2. (25 puntos) Halle las siguientes integrales:

Solución:

a) Integramos por partes haciendo

$u = 3x, \qquad dv = \operatorname{sen}(x)\cos(x)dx$

$du = 3dx, \qquad v = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2}.$

$$\begin{aligned}
\int 3x\operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx &= 3x\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2} - \int 3\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2}\,dx \\
&= \frac{3x\operatorname{sen}^2(x)}{2} - \frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right)dx \\
&= \frac{3x\operatorname{sen}^2(x)}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}\right) + C \\
&= \boxed{\frac{3x\operatorname{sen}^2(x)}{2} - \frac{3x}{4} + \frac{3\operatorname{sen}(2x)}{8} + C}
\end{aligned}$$

a) También se puede hacer primero $\int 3x\operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx = \int 3x\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\,dx.$

Integramos por partes haciendo

$u = 3x, \qquad dv = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}dx$

$du = 3dx, \qquad v = \frac{-\cos(2x)}{4}.$

$$\begin{aligned}
\int 3x\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\,dx &= 3x\frac{-\cos(2x)}{4} - \int 3\frac{-\cos(2x)}{4}\,dx \\
&= -\frac{3x\cos(2x)}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right) + C \\
&= \boxed{-\frac{3x\cos(2x)}{4} + \frac{3\operatorname{sen}(2x)}{8} + C}
\end{aligned}$$

Aunque estos dos resultados parecen diferentes, la identidad $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$ nos permite obtener uno a partir del otro.

---

b) Completando cuadrados en el denominador obtenemos
$x^2 + 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$

Hacemos el cambio de variables:
$u = x - 2, \qquad du = dx.$

y el cambio de variables:
$z = \frac{u}{3}, \qquad dz = \frac{1}{3}du.$

en la segunda integral.

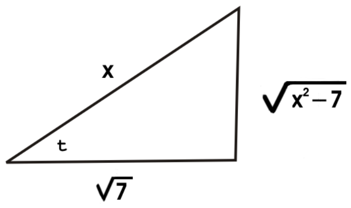
$$\begin{aligned}
\int \frac{2x-5}{x^2-4x+13}\,dx &= \int \frac{2(u+2)-5}{u^2+9}\,du = \int \frac{2u-1}{u^2+9}\,du \\
&= \int \frac{2u}{u^2+9}\,du - \int \frac{1}{u^2+9}\,du \\
&= \ln(u^2+9) - \int \frac{1}{9\left(\left(\frac{u}{3}\right)^2+1\right)}\,du \\
&= \ln(x^2-4x+13) - \frac{1}{9}\int \frac{3}{z^2+1}\,dz \\
&= \ln(x^2-4x+13) - \frac{1}{3}\arctan(z) + C \\
&= \boxed{\ln(x^2-4x+13) - \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C}
\end{aligned}$$

c) Hacemos el cambio de variables
$x = \sqrt{7}\sec(t)$

de donde obtenemos:

$x^2 - 7 = 7\sec^2(t) - 7 = 7\tan^2(t).$

$dx = \sqrt{7}\sec(t)\tan(t)dt.$



$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-7}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{7}\tan(t)}{\sqrt{7}\sec(t)}\sqrt{7}\sec(t)\tan(t)dt \\
&= \sqrt{7}\int \tan^2(t)\ dt = \sqrt{7}\int (\sec^2(t)-1)\ dt \\
&= \sqrt{7}\tan(t) - \sqrt{7}\ t + C \\
&= \sqrt{7}\ \frac{\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{7}} - \sqrt{7}\ \text{arcsec}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C \\
&= \boxed{\sqrt{x^2-7} - \sqrt{7}\ \text{arcsec}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C}
\end{aligned}$$

c) También podemos hacer
el cambio de variables

$u = \sqrt{x^2-7}$
$x = \sqrt{u^2+7}$

de donde obtenemos:

$dx = \dfrac{u\ du}{\sqrt{u^2+7}}.$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-7}}{x}\,dx &= \int \frac{u}{\sqrt{u^2+7}}\frac{u\ du}{\sqrt{u^2+7}} \\
&= \int \frac{u^2\ du}{u^2+7} = \int \frac{(u^2+7-7)\ du}{u^2+7} \\
&= \int 1\ du + \int \frac{-7\ du}{u^2+7} \\
&= u - 7\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{7}}\right) + C \\
&= \boxed{\sqrt{x^2-7} - \sqrt{7}\ \arctan\left(\sqrt{\frac{x^2-7}{7}}\right) + C}
\end{aligned}$$

del triángulo se observa que $t = \text{arcsec}\left(\dfrac{x}{\sqrt{7}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{x^2-7}{7}}\right)$.

---

d) Integramos por partes haciendo

$u = \ln(5x),\qquad dv = \sqrt[3]{x}\ dx$

$du = \dfrac{1}{x}\ dx,\qquad v = \dfrac{3}{4}x^{4/3}.$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{x}\ln(5x)\ dx &= \ln(5x)\frac{3}{4}x^{4/3} - \int \frac{3}{4}x^{4/3}\frac{1}{x}\ dx \\
&= \frac{3\ln(5x)x^{4/3}}{4} - \frac{3}{4}\int x^{1/3}\ dx \\
&= \frac{3\ln(5x)x^{4/3}}{4} - \frac{3}{4}\frac{3}{4}x^{4/3} + C \\
\boxed{\frac{3\ln(5x)x^{4/3}}{4} - \frac{9}{16}x^{4/3} + C} &= \boxed{\frac{3}{16}x^{4/3}\left(4\ln(5x) - 3\right) + C}
\end{aligned}$$

---

e) Primero escribimos la integral de la siguiente manera:

$$\int \text{sen}^3(x)\sqrt{5\cos^3(x)}\ dx = \sqrt{5}\int \text{sen}^2(x)\cos^{3/2}(x)\,\text{sen}(x)\ dx = \sqrt{5}\int (1-\cos^2(x))\cos^{3/2}(x)\,\text{sen}(x)\ dx$$

Hacemos el cambio
de variables:

$u = \cos(x)$

$du = -\,\text{sen}(x)\ dx.$

$$\begin{aligned}
\sqrt{5}\int (1-\cos^2(x))\cos^{3/2}(x)\,\text{sen}(x)\ dx &= \sqrt{5}\int (1-u^2)u^{3/2}(-du) \\
&= \sqrt{5}\int (u^{7/2} - u^{3/2})\ du \\
&= \sqrt{5}\left(\frac{2}{9}u^{9/2} - \frac{2}{5}u^{5/2}\right) + C \\
&= \boxed{\frac{2\sqrt{5}\cos^{9/2}(x)}{9} - \frac{2\sqrt{5}\cos^{5/2}(x)}{5} + C}
\end{aligned}$$

---

3. (5 puntos) Demuestre que:

a) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. *b*) $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.

Demostrado en clase. (Revise sus apuntes)